Mathe-Grundlagen

Merkblätter für die Klassen 5 und 6

Stellenwerte, schriftliches Rechnen, Brüche, Prozente, Größen und Sachaufgaben

Axel Ramge

Mathe-Grundlagen. Merkblätter für die Klassen 5 und 6

© 2026 Axel Ramge

Dieses Werk steht unter der Lizenz Creative Commons Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International (CC BY-SA 4.0). Es darf kopiert, verbreitet, bearbeitet und übersetzt werden, auch kommerziell, sofern der Name des Urhebers genannt, auf die Lizenz verwiesen und kenntlich gemacht wird, ob Änderungen vorgenommen wurden. Bearbeitungen müssen unter derselben Lizenz weitergegeben werden.

Lizenztext: `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de`

Vorschlag für die Namensnennung: *Axel Ramge, „Mathe-Grundlagen. Merkblätter für die Klassen 5 und 6“, CC BY-SA 4.0.*

Gesetzt mit LuaLaTeX in Latin Modern, der Unicode-Fassung von Donald E. Knuths Computer Modern. Stand: `d6aa60e · 2026-11-29`.

Inhalt

Teil I Zahlen und Rechnen

1 Stellenwerte und Dezimalzahlen 4
2 Schriftlich plus und minus 5
3 Schriftlich multiplizieren 6
4 Schriftlich teilen 7
5 Reihenfolge beim Rechnen 10
6 Teilbarkeit, ggT und kgV 11
7 Extra scharf: ggT in Lean 12

Teil II Brüche und Anteile

8 Brüche 14
9 Bruch und Dezimalzahl 16
10 Einfache Prozente 17
11 Verhältnisse und Maßstab 18

Teil III Größen und Sachrechnen

12 Einheiten umwandeln 19
13 Extra scharf: Ingenieurmethode 20
14 Fläche und Volumen 21
15 Diagramme und Mittelwert 22
16 Sachaufgaben 23

Stellenwerte und Dezimalzahlen

Jede Ziffer hat einen Platz, und der Platz bestimmt ihren Wert.

Die Stellenwerttafel das Komma steht zwischen Einern und Zehnteln

T Tausender	**H** Hunderter	**Z** Zehner	**E** Einer	**,**	**z** Zehntel	**h** Hundertstel	**t** Tausendstel
4	0	7	3	,	2	0	5

4073,205 heißt: 4 Tausender, 0 Hunderter, 7 Zehner, 3 Einer, 2 Zehntel, 0 Hundertstel, 5 Tausendstel. Gelesen wird nach dem Komma **Ziffer für Ziffer**: „viertausenddreiundsiebzig Komma zwei null fünf“.

Ein Platz nach links ist **10-mal so viel**, ein Platz nach rechts ein **Zehntel davon**. Die 0 hält einen Platz frei: 3,05 ist nicht 3,5.

Dezimalzahlen vergleichen Komma unter Komma

- **Komma unter Komma** schreiben.
- Hinten mit **Nullen auffüllen**, bis beide gleich lang sind.
- **Von links** Stelle für Stelle vergleichen. Die erste verschiedene Ziffer entscheidet.

3,70 Einer gleich, Zehntel: $7 > 6$,
3,65 also $3{,}7 > 3{,}65$.

Nicht: „65 ist mehr als 7“. Mehr Ziffern heißt nach dem Komma nicht mehr wert.

Runden auf eine bestimmte Stelle

- Die **Rundungsstelle** markieren.
- Auf die Ziffer **rechts daneben** schauen.
- **0 bis 4**: abrunden, die Stelle bleibt.
  5 bis 9: aufrunden, die Stelle wird um 1 größer.
- Alles dahinter fällt weg.

Auf Hundertstel: $3{,}7\underline{4}6 \approx 3{,}75$
Auf Zehntel: $8{,}\underline{0}4 \approx 8{,}0$
Auf Zehntel: $2{,}\underline{9}6 \approx 3{,}0$

Die 0 am Ende bleibt stehen: Sie zeigt, auf welche Stelle gerundet wurde.

Mal und durch 10, 100, 1000 das Komma wandert

Mal: Komma nach **rechts**, so viele Stellen, wie die Zahl Nullen hat.

$3{,}75 \cdot 10 = 37{,}5$
$3{,}75 \cdot 100 = 375$
$0{,}6 \cdot 1000 = 600$

Durch: Komma nach **links**, so viele Stellen, wie die Zahl Nullen hat.

$3{,}75 : 10 = 0{,}375$
$42 : 100 = 0{,}42$
$5 : 1000 = 0{,}005$

Fehlt ein Platz? Mit Nullen auffüllen. Bei einer ganzen Zahl steht das Komma unsichtbar hinter der letzten Ziffer: $42 = 42{,}0$.

Schriftlich plus und minus

untereinander rechnen, Spalte für Spalte — und im Raster bleiben: **je Kästchen eine Ziffer oder das Komma**

Schriftlich addieren $6785 + 4648$

		6	7	8	5
+		4	6	4	8
	1	1	1	1	
	1	1	4	3	3

Überträge

1. **Einer unter Einer,** rechtsbündig, jede Ziffer in ein Kästchen.
2. **Rechts anfangen:** $5 + 8 = 13$. Die 3 kommt unter den Strich.
3. **Die 1 ist der Übertrag:** klein, *in die nächste Spalte links*, in die Zeile *direkt über dem Strich*. Dort rechnet man als Nächstes.
4. **Übertrag mitzählen:** $8 + 4 + 1 = 13$, und so weiter. Ganz links wird er unten zur neuen Ziffer: $6 + 4 + 1 = 11$.

Schriftlich subtrahieren $6205 - 2738$, durch Ergänzen

	6	2	0	5
−	2	7	3	8
	1	1	1	
	3	4	6	7

Überträge, wie beim Plus

1. **Größere Zahl oben,** Einer unter Einer.
2. **Von unten nach oben ergänzen:** „8 plus wie viel ist 5?“ Geht nicht, also bis 15: $8 + 7 = 15$. Die 7 kommt unter den Strich.
3. **Bis 15 statt bis 5 — das gibt einen Übertrag:** die 1 klein in die nächste Spalte, direkt über den Strich, *genau wie beim Plus*.
4. **Übertrag zur unteren Ziffer zählen:** $3 + 1 = 4$, von 4 bis 10: 6, Übertrag. $7 + 1 = 8$, von 8 bis 12: 4, Übertrag. $2 + 1 = 3$, von 3 bis 6: 3.

Nichts wird durchgestrichen. Die 0 oben ist kein Sonderfall: Man ergänzt bis 10.

Nie umdrehen. Immer von unten nach oben. Wer von 5 bis 8 zählt statt von 8 bis 15, bekommt hier 4533. Die Probe merkt es: $4533 + 2738 = 7271$, nicht 6205.

Mit Komma $12{,}5 + 3{,}75$

	1	2	,	5	0
+		3	,	7	5
		1			
	1	6	,	2	5

1. **Komma unter Komma.** Das Komma bekommt ein eigenes Kästchen, in jeder Zeile in derselben Spalte. Dann stehen Einer unter Einer von allein.
2. **Leere Kästchen hinten mit 0 füllen:** 12,5 wird 12,50.
3. **Rechnen wie ohne Komma.** $5 + 7 = 12$: der Übertrag *springt über die Kommaspalte* zu den Einern.
4. **Das Komma im Ergebnis** in dieselbe Spalte herunterholen.

Beim Minus genauso: Komma unter Komma, Nullen auffüllen, ergänzen.

Tipps damit nichts verrutscht

- **Lieber eine Spalte Platz lassen** als zwei Zeichen in ein Kästchen quetschen.
- **Drei Zahlen oder mehr:** Der Übertrag kann auch 2 sein. $9 + 8 + 7 = 24$: 4 unten, 2 klein daneben.
- **Vorher überschlagen:** Ü $6800 + 4600 = 11400$. Das Ergebnis 11433 liegt nah dran.
- **Probe beim Minus:** Ergebnis plus untere Zahl gibt die obere. $3467 + 2738 = 6205$.

Schriftlich multiplizieren

ohne und mit Komma — und im Raster bleiben: **je Kästchen eine Ziffer, das Komma oder der Malpunkt**

Ohne Komma $486 \cdot 35$

	4	8	6	·	3	5
			2	1		
		1	4	5	8	
				4	3	
			2	4	3	0
			1	1		
		1	7	0	1	0

1. **Die Aufgabe in eine Zeile,** jede Ziffer und der Malpunkt in ein eigenes Kästchen. Darunter ein Strich.
2. **Mit der ersten Ziffer des zweiten Faktors anfangen:** $486 \cdot 3$, von rechts nach links, also bei den Einern. Auch das Ergebnis entsteht **von hinten**: Die erste Ziffer, die du schreibst, ist seine letzte und kommt *genau unter die 3*.
3. **Überträge klein aufschreiben,** in die Zeile direkt darüber: $6 \cdot 3 = 18$: **„8 hin, 1 im Sinn“**. Die 8 hinschreiben, die **1** klein über die nächste Spalte.
   $8 \cdot 3 = 24$, plus die kleine **1** $= 25$: die 5 hin, die **2** klein weiter.
   $4 \cdot 3 = 12$, plus die kleine **2** $= 14$: fertig, 1458.
4. **Dann die nächste:** $486 \cdot 5 = 2430$, wieder mit kleinen Überträgen, und *genau unter der 5* beginnen. So rückt jede Zeile eine Stelle nach rechts.
5. **Zusammenzählen wie beim Plus.** Die kleinen Zahlen vom Malnehmen zählen nicht mit! Nur die blauen über dem Strich gehören zum Plus.

Mit Komma $3{,}24 \cdot 1{,}05$

	3	2	4	·	1	0	5
			3	2	4		
				0	0	0	
					1	2	
				1	6	2	0
				1			
			3	4	0	2	0

3	,	4	0	2	0	$= 3{,}402$

4 Stellen

1. **Die Kommas erst weglassen** und rechnen wie oben: $324 \cdot 105 = 34020$. Für die 0 im zweiten Faktor eine Zeile aus Nullen, dann rückt die 5 richtig.
2. **Kommastellen zählen,** also Ziffern hinter dem Komma: 3,24 hat 2, 1,05 hat 2. Zusammen **4**. Die 0 hinter dem Komma zählt mit.
3. **Im Ergebnis von rechts 4 Stellen abzählen** und dort das Komma setzen, in ein eigenes Kästchen: 3,4020.
4. **Die 0 ganz hinten darf jetzt weg:** 3,402. Die 0 zwischen 4 und 2 bleibt. Erst nach dem Komma-Setzen streichen, sonst zählt man falsch.

Reichen die Ziffern nicht, vorne mit 0 auffüllen: $0{,}3 \cdot 0{,}2$: $3 \cdot 2 = 6$, zwei Stellen, also 0,06.

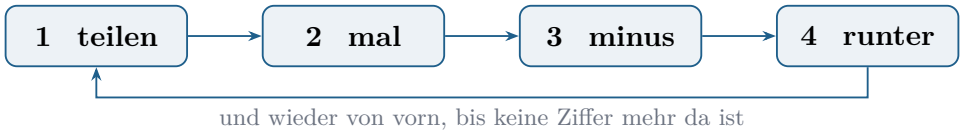
Beim Mal nicht Komma unter Komma. Komma unter Komma gilt nur beim Plus und Minus. Beim Mal werden die Kommas weggelassen und am Ende die Kommastellen gezählt.

Tipps damit nichts verrutscht

- **Die längere Zahl nach vorn.** $486 \cdot 35$ gibt zwei Zeilen, $35 \cdot 486$ drei.
- **Eine 0 im zweiten Faktor:** die Zeile aus Nullen hinschreiben, wie oben bei 1,05. Dann rückt die nächste Zeile nicht falsch.
- **Einmaleins unsicher?** Kurz am Rand ausrechnen, nicht raten.
- **Überschlag schon geübt?** (eigenes Blatt) Ü $500 \cdot 40 = 20000$. Das Ergebnis 17010 passt, 1701 nicht. Auch beim Komma: Ü $3 \cdot 1 = 3$, also 3,402 und nicht 34,02.
- **Für Profis:** Wenn es richtig flüssig läuft, kannst du dir die kleinen Zahlen auch merken. Bis dahin: **aufschreiben!**

Schriftlich teilen

ohne und mit Komma — und im Raster bleiben: **je Kästchen eine Ziffer, das Komma oder ein Rechenzeichen**



Erst die Nebenrechnung nachsehen statt raten

Bevor es losgeht, schreibst du die **Reihe des Divisors** an den Rand: $1 \cdot 6$ bis $10 \cdot 6$. Am sichersten durch Addieren, immer $+6$: 6, 12, 18, 24, ... Die letzte Zeile ist die **Kontrolle**: $10 \cdot 6$ muss 60 sein, die 6 mit einer 0. Hast du dich unterwegs verrechnet, stimmt sie nicht — denn ein Fehler wandert beim Addieren in jede Zeile danach. Dann musst du beim Teilen nicht mehr im Kopf raten, sondern siehst nur nach: *Welche Zahl der Reihe ist die größte, die noch hineinpasst?* Ihre Zeile verrät die Ergebnisziffer und das Produkt auf einmal. Was du nicht brauchst, bleibt grau.

1 Der Grundfall $2736 : 6$

2	7	3	6	:	6	=	4	5	6
2	4	↓	↓						
	3	3							
	3	0							
		3	6						
		3	6						
			0						

Nebenrechnung: die Reihe der 6

1	·	6	=		6
2	·	6	=	1	2
3	·	6	=	1	8
4	·	6	=	2	4
5	·	6	=	3	0
6	·	6	=	3	6
7	·	6	=	4	2
8	·	6	=	4	8
9	·	6	=	5	4
1 0	·	6	=	6	0

Kontrolle: 6 mit einer 0

1. **Teilen:** Die 6 passt nicht in 2, also nimm 27. In der Reihe: Die größte Zahl bis 27 ist $24 = 4 \cdot 6$. Die 4 kommt ins Ergebnis.
2. **Mal:** Das Produkt steht schon in der Reihe: 24 unter die 27.
3. **Minus:** $27 - 24 = 3$. Der Rest muss kleiner sein als 6.
4. **Runter:** die nächste Ziffer, die 3, herunterholen. Das gibt 33.

Wieder von vorn: Bis 33 passt $30 = 5 \cdot 6$, Rest 3, die 6 herunter. Bis 36 passt $36 = 6 \cdot 6$, Rest 0. Keine Ziffer mehr da: fertig, $2736 : 6 = 456$.

Jede Ergebnisziffer, ihr Produkt und ihre Zeile in der Reihe haben dieselbe Farbe. Minuszeichen schreibt man nicht hin, der Strich genügt.

Prüfen bei jedem Schritt und am Ende

- **Der Rest ist immer kleiner als der Divisor.** Ist er größer, war die Ergebnisziffer zu klein — in der Reihe eine Zeile weiter unten nachsehen.
- **Ein Rest ist nie negativ.** Geht das Minus nicht, war die Ziffer zu groß: eine Zeile weiter oben.
- **Die Reihe durch Addieren** rechnen, nicht aus dem Kopf, und immer bis 10·. Ist die letzte Zeile nicht der Divisor mit einer 0, steckt irgendwo ein Fehler: von oben neu addieren.
- **Vorher überschlagen:** Ü $3000 : 6 = 500$, das Ergebnis 456 liegt nah dran. Ü $4200 : 6 = 700$ fängt die vergessene 0.
- **Probe mit Mal:** Ergebnis mal Divisor gibt die erste Zahl.
  $456 \cdot 6 = 2736$, $706 \cdot 6 = 4236$,
  $1{,}75 \cdot 4 = 7$, $2{,}45 \cdot 3 = 7{,}35$,
  $60 \cdot 0{,}07 = 4{,}2$, $14 \cdot 27 = 378$.

2 Die 0 im Ergebnis $4236 : 6$

4	2	3	6	:	6	=	7	**0**	6
4	2	↓	↓						
	0	3							
		0							
		3	6						
		3	6						
			0						

Nebenrechnung: die Reihe der 6

	1	· 6	=		6
	2	· 6	=	1	2
	3	· 6	=	1	8
	4	· 6	=	2	4
	5	· 6	=	3	0
	6	· 6	=	3	6
	7	· 6	=	4	2
	8	· 6	=	4	8
	9	· 6	=	5	4
1	0	· 6	=	6	0

Kontrolle: 6 mit einer 0

1. Bis 42 passt $42 = 7 \cdot 6$, Rest 0. Die 3 herunter.
2. **Die 6 passt nicht in 3.** Auch das ist ein Schritt: Ins Ergebnis kommt eine **0**, darunter $0 \cdot 6 = 0$, Rest 3. In der Reihe steht dafür keine Zeile.
3. Erst jetzt die 6 herunter: Bis 36 passt $36 = 6 \cdot 6$, Rest 0. Also $4236 : 6 = 706$.

Die 0 nicht vergessen. Wer bei „passt nicht“ gleich die nächste Ziffer dazunimmt, schreibt 76 statt 706. Die Regel: **Jede heruntergeholte Ziffer bringt genau eine Ziffer ins Ergebnis** — notfalls eine 0. Der Überschlag merkt es auch: Ü $4200 : 6 = 700$, nicht 70.

3 Es bleibt ein Rest $7 : 4$ — Nullen anhängen

7	,	0	0	:	4	=	1	,	7	5
4		↓	↓							
3		0								
2		8								
		2	0							
		2	0							
			0							

Nebenrechnung: die Reihe der 4

	1	· 4	=		4
	2	· 4	=		8
	3	· 4	=	1	2
	4	· 4	=	1	6
	5	· 4	=	2	0
	6	· 4	=	2	4
	7	· 4	=	2	8
	8	· 4	=	3	2
	9	· 4	=	3	6
1	0	· 4	=	4	0

Kontrolle: 4 mit einer 0

1. $7 : 4$: Bis 7 passt $4 = 1 \cdot 4$, Rest 3. Aber es ist keine Ziffer mehr da.
2. **Nullen anhängen:** $7 = 7{,}00$. Der Wert bleibt gleich, aber jetzt gibt es etwas herunterzuholen.
3. Die erste 0 steht hinter dem Komma: *zuerst* das Komma ins Ergebnis. Dann bis 30: $28 = 7 \cdot 4$, Rest 2. Die nächste 0 herunter: bis 20 passt $20 = 5 \cdot 4$, Rest 0. Also $7 : 4 = 1{,}75$.

Wie viele Nullen? So viele, bis der Rest 0 ist. Hört es nie auf, etwa bei $1 : 3 = 0{,}333\ldots$, nach zwei oder drei Stellen runden.

4 Komma in der ersten Zahl $7{,}35 : 3$

7	,	3	5	:	3	=	2	,	4	5
6		↓	↓							
1		3								
1		2								
		1	5							
		1	5							
			0							

Nebenrechnung: die Reihe der 3

	1	· 3	=		3
	2	· 3	=		6
	3	· 3	=		9
	4	· 3	=	1	2
	5	· 3	=	1	5
	6	· 3	=	1	8
	7	· 3	=	2	1
	8	· 3	=	2	4
	9	· 3	=	2	7
1	0	· 3	=	3	0

Kontrolle: 3 mit einer 0

1. Bis 7 passt $6 = 2 \cdot 3$, Rest 1.
2. **Die 3 herunterholen — sie steht hinter dem Komma.** Also *zuerst* im Ergebnis das Komma setzen, in ein eigenes Kästchen.
3. Weiter wie ohne Komma: bis 13 passt $12 = 4 \cdot 3$, Rest 1; bis 15 passt $15 = 5 \cdot 3$, Rest 0. Also $7{,}35 : 3 = 2{,}45$.

Die Kommaspalte bleibt in den Zeilen darunter leer: Dort stünde sonst ein zweites Zeichen neben der Ziffer.

5 Komma in der zweiten Zahl $4{,}8 : 0{,}6$ und $4{,}2 : 0{,}07$

Durch eine Kommazahl teilt man nicht. Deshalb schiebt man das Komma **in beiden Zahlen gleich weit nach rechts**, bis der Divisor keins mehr hat. Das Ergebnis ändert sich dabei nicht — beide Zahlen werden ja gleich oft mal 10 genommen.

beide Kommas 1 Stelle nach rechts

4	,	8	:	0	,	6
4	8	:	6	=	**8**	

beide Kommas 2 Stellen nach rechts

4	,	2	:	0	,	0	7
4	2	0	:	7	=	6	0

- $4{,}8 : 0{,}6$: 0,6 hat eine Stelle hinter dem Komma, also beide Kommas **eine** Stelle nach rechts: $48 : 6 = 8$. Das ist Einmaleins.
- $4{,}2 : 0{,}07$: 0,07 hat zwei Stellen, also **zwei** nach rechts. Bei 4,2 fehlt dafür eine Stelle — eine 0 anhängen: $420 : 7 = 60$. Die letzte 0 im Ergebnis ist wieder eine aus Beispiel 2: $0 : 7 = 0$.

6 Zweistelliger Divisor $378 : 27$

Hier hilft die Reihe am meisten: $27, 54, 81, \ldots$ kennt niemand auswendig. Durch Addieren ist sie schnell da — immer $+27$. Ohne Reihe rät man bei 108 leicht 3 oder 5.

3	7	8	:	2	7	=	1	4
2	7	↓						
1	0	8						
1	0	8						
		0						

Nebenrechnung: die Reihe der 27

	1	·	2	7	=	2	7
	2	·	2	7	=	5	4
	3	·	2	7	=	8	1
	4	·	2	7	=	1	0	8
	5	·	2	7	=	1	3	5
	6	·	2	7	=	1	6	2
	7	·	2	7	=	1	8	9
	8	·	2	7	=	2	1	6
	9	·	2	7	=	2	4	3
1	0	·	2	7	=	2	7	0

Kontrolle: 27 mit einer 0

1. Die 27 passt nicht in 3, also 37. In der Reihe: Bis 37 passt $27 = 1 \cdot 27$, Rest 10.
2. Die 8 herunter: 108. In der Reihe steht $108 = 4 \cdot 27$ genau. Rest 0, also $378 : 27 = 14$.

Reihenfolge beim Rechnen

Was kommt zuerst dran? Eine Abmachung, damit alle dasselbe Ergebnis bekommen.

Klammer vor Punkt vor Strich kurz: KlaPuStri

1 Klammer ( ) vor **2 Punkt** · : vor **3 Strich** + −

Was in der Klammer steht, zuerst. Gibt es Klammer in Klammer: die innere zuerst.

$2 \cdot (10 - \underline{(3+4)})$
$= 2 \cdot \underline{(10-7)}$
$= 2 \cdot 3 = 6$

Dann Punkt, dann Strich.

$3 + \underline{4 \cdot 5}$
$= 3 + 20 = 23$

nicht $7 \cdot 5 = 35$ — das wäre $(3+4) \cdot 5$.

Gleichrangig: von links nach rechts wie beim Lesen

Stehen nur Punktrechnungen da, rechnet man **von links nach rechts**:

$\underline{12 : 4} \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$

nicht $12 : 12 = 1$.

Ebenso bei nur Strichrechnungen:

$\underline{20 - 8} + 2 = 12 + 2 = 14$

nicht $20 - 10 = 10$.

Aufschreiben damit man den Fehler findet

- **Je Zeile ein Schritt.** Was jetzt dran ist, unterstreichen.
- **Alles andere unverändert abschreiben** — auch die Klammern, die noch nicht dran sind.
- **Das Gleichheitszeichen** an den Anfang jeder neuen Zeile.

$30 - \underline{(4+2)} \cdot 3$
$= 30 - \underline{6 \cdot 3}$
$= \underline{30 - 18}$
$= 12$

---

ab Klasse 10: mit Potenzen

Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich kurz: KlaPoPuStri

1 Klammer ( ) vor **2 Potenz** a^n vor **3 Punkt** · : vor **4 Strich** + −

Eine Potenz ist kurz für Malnehmen:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2 ist die **Basis**, 3 der **Exponent** (die Hochzahl): wie oft die Basis mit sich selbst malgenommen wird.

Potenz direkt nach der Klammer:

$2 + \underline{3^2} \cdot 4$
$= 2 + \underline{9 \cdot 4}$
$= 2 + 36 = 38$

Der Exponent gilt nur für das, was direkt darunter steht.

$2 \cdot \underline{3^2} = 2 \cdot 9 = 18$ nicht $6^2 = 36$
$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ hier mit Klammer

Auch das Minus steht nicht darunter.

$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$
$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

Ausnahme: der Potenzturm. Steht auf einem Exponenten noch einer, rechnet man **von oben nach unten** — nicht von links nach rechts: $2^{3^2} = 2^9 = 512$, nicht $8^2 = 64$.
Selten. Die Regel „gleichrangig von links nach rechts“ gilt sonst immer.

Teilbarkeit, ggT und kgV

Geht die Zahl ohne Rest auf? Das sieht man oft, ohne zu rechnen — und braucht es zum Kürzen und für den Hauptnenner.

Teiler und Vielfache zwei Seiten derselben Sache

Teiler von 12: Zahlen, durch die 12 ohne Rest geht: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Vielfache von 12: die Zwölferreihe: 12, 24, 36, 48, …

Teilbarkeitsregeln ohne zu rechnen

durch	geht, wenn …	Beispiel
2	die letzte Ziffer gerade ist (0, 2, 4, 6, 8)	134
5	die letzte Ziffer 0 oder 5 ist	235
10	die letzte Ziffer 0 ist	470
4	die letzten **zwei** Ziffern durch 4 gehen	1316, denn $16 : 4 = 4$
3	die **Quersumme** durch 3 geht	471: $4 + 7 + 1 = 12$
9	die **Quersumme** durch 9 geht	2835: $2 + 8 + 3 + 5 = 18$

Die Quersumme ist die Summe aller Ziffern. Bei 3 und 9 hilft die letzte Ziffer nichts: 13 endet auf 3 und geht nicht durch 3.

Primzahlen haben genau zwei Teiler: 1 und sich selbst

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, …

Die 1 ist keine Primzahl, sie hat nur einen Teiler. Die 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Primfaktoren jede Zahl als Produkt von Primzahlen

Immer durch die **kleinste Primzahl** teilen, die aufgeht, bis nur noch eine Primzahl übrig ist.

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$60 : 2 = 30$
$30 : 2 = 15$
$15 : 3 = 5$ 5 ist eine Primzahl, fertig.

ggT und kgV größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches

ggT: die Primfaktoren, die **beide** haben.

$24 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$
$36 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 3$
$\text{ggT} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{12}$

Wozu? Zum Kürzen: durch 12 teilt man $\frac{24}{36}$ auf einmal zu $\frac{2}{3}$.

kgV: Vielfache der **größeren** Zahl durchgehen, bis die kleinere aufgeht.

12 und 18: 18 geht nicht, **36** geht.
$\text{kgV} = \mathbf{36}$

Wozu? Für den Hauptnenner: $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{18}$ bekommen den Nenner 36.



ggT und Primfaktoren in Lean

Die Verfahren aus *Teilbarkeit, ggT und kgV* als Programm in Lean. Lean rechnet nicht nur, es prüft auch: Ein Programm nimmt es nur an, wenn bewiesen ist, dass es aufhört. Hinter `--` steht ein Kommentar, hinter `#eval` wird gerechnet.

ggT nach Euklid erst abziehen, dann den Rest nehmen

```
-- Nat sind die Zahlen 0, 1, 2, ...  Abziehen bleibt bei 0 stehen: 3 - 5 = 0.
-- Bei jedem "if" merkt sich Lean, was gilt. Das braucht der Beweis unten.
def ggT (a b : Nat) : Nat :=
  if a = 0 then b                    -- die 0 abfangen, sonst endlos
  else if b = 0 then a
  else if a = b then a               -- gleich: fertig
  else if a > b then ggT (a - b) b   -- 36 24  ->  12 24
  else ggT a (b - a)                 -- 12 24  ->  12 12  ->  12
termination_by a + b                 -- die Summe wird jedes Mal kleiner;
decreasing_by all_goals omega        -- omega rechnet das nach

-- Schneller: statt oft abziehen gleich den Rest nehmen.
def ggT' (a b : Nat) : Nat :=
  if b = 0 then a
  else ggT' b (a % b)                -- 36 24  ->  24 12  ->  12 0  ->  12
termination_by b                     -- der Rest ist kleiner als der Teiler
decreasing_by exact Nat.mod_lt a (by omega)

-- kgV: die Probe  ggT · kgV = a · b,  nach kgV umgestellt.
def kgV (a b : Nat) : Nat := a / ggT' a b * b

#eval ggT 36 24      -- 12
#eval kgV 12 18      -- 36
```

Warum termination_by? Lean fragt bei jeder Funktion, die sich selbst aufruft: Hört das auf? Man nennt eine Zahl, die bei jedem Aufruf kleiner wird, und beweist das. Ohne die erste Zeile mit der 0 gelänge der Beweis nicht — und tatsächlich liefe `ggT 0 5` dann endlos: $5 - 0$ ist wieder 5.

Primfaktorzerlegung immer durch die kleinste Zahl, die aufgeht

```
-- Die kleinste Zahl, die aufgeht, ist von selbst eine Primzahl:
-- hätte sie einen kleineren Teiler, wäre der schon vorher aufgegangen.
-- Ist t * t > m, hat m keinen Teiler mehr: der Partner wäre kleiner als t.
def zerlege (m t : Nat) : List Nat :=
  if m <= 1 then []
  else if t < 2 then []                          -- kommt nicht vor, wir starten bei 2
  else if m % t = 0 then t :: zerlege (m / t) t  -- geht auf: merken
  else if t * t > m then [m]                     -- m ist prim
  else zerlege m (t + 1)                         -- nächste Zahl
-- Aufhören: Entweder wird m kleiner, oder m bleibt und der Abstand m - t sinkt.
termination_by (m, m - t)
decreasing_by
  · exact Prod.Lex.left _ _ (Nat.div_lt_self (by omega) (by omega))
  · have : t < t * t := Nat.lt_mul_self_iff.mpr (by omega)
    exact Prod.Lex.right _ (by omega)

def primfaktoren (n : Nat) : List Nat := zerlege n 2

#eval primfaktoren 60      -- [2, 2, 3, 5]
```

ggT und kgV aus den Primfaktoren „die beide haben“ und „alle“

```
-- Beide Listen sind aufsteigend; man geht sie nebeneinander durch.
-- Hier sieht Lean von selbst, dass es aufhört: die Listen werden nur kürzer.
def gemeinsam : List Nat -> List Nat -> List Nat
  | x :: xs, y :: ys =>
    if x = y then x :: gemeinsam xs ys      -- beide haben x: einmal nehmen
    else if x < y then gemeinsam xs (y :: ys)
    else gemeinsam (x :: xs) ys
  | _, _ => []

def alle : List Nat -> List Nat -> List Nat
  | x :: xs, y :: ys =>
    if x = y then x :: alle xs ys           -- gemeinsam: einmal nehmen
    else if x < y then x :: alle xs (y :: ys)
    else y :: alle (x :: xs) ys
  | xs, [] => xs                            -- eine Liste leer: Rest anhängen
  | [], ys => ys

def produkt : List Nat -> Nat
  | [] => 1
  | x :: xs => x * produkt xs

#eval produkt (gemeinsam (primfaktoren 24) (primfaktoren 36))   -- 12
#eval produkt (alle      (primfaktoren 24) (primfaktoren 36))   -- 72
```

Ein echter Beweis nicht für Beispiele, sondern für alle Zahlen

```
-- ggT' liefert immer dasselbe wie Nat.gcd, den ggT, der in Lean eingebaut ist.
-- "induction ... using ggT'.induct" macht aus den zwei Zeilen von ggT' zwei Fälle.
theorem ggT'_ist_gcd (a b : Nat) : ggT' a b = Nat.gcd a b := by
  induction a, b using ggT'.induct with
  | case1 a =>                -- b = 0:  ggT' a 0 = a = gcd a 0
    unfold ggT'; simp
  | case2 a b h ih =>         -- b nicht 0:  ein Schritt Euklid
    unfold ggT'; simp [h]
    rw [ih, Nat.gcd_comm a b, Nat.gcd_rec b a, Nat.gcd_comm]
```

`Nat.gcd_rec` sagt $\mathrm{ggT}(b, a) = \mathrm{ggT}(a \bmod b, b)$ — genau Euklids Idee.
Ausprobieren ohne Installation: `live.lean-lang.org`.

Brüche

Seite 1: was ein Bruch ist und wie man ihn umformt. Seite 2: die vier Rechenarten.

Was ein Bruch ist Zaunkönig über Nest: Zähler oben, Nenner unten

$\frac{3}{4}$ **Zähler** 3: so viele Teile nehme ich.
Nenner 4: in so viele gleiche Teile ist das Ganze geteilt.



drei von vier gleichen Teilen

Erweitern Zähler und Nenner mit derselben Zahl mal

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ Der Wert bleibt gleich: Es sind mehr, aber kleinere Teile.

Kürzen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl

$\frac{18}{24} = \frac{18 : 6}{24 : 6} = \frac{3}{4}$ Am schnellsten mit dem **ggT**. Ergebnisse immer so weit kürzen, wie es geht.

Kürzen geht nur bei Mal, nie bei Plus. Die Zahl muss Faktor des *ganzen* Zählers und des *ganzen* Nenners sein.

$\frac{2 \cdot 5}{2} = 5$ richtig, die 2 ist Faktor. $\frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$ hier darf die 2 **nicht** weg.

Gemischte Zahlen ein Ganzes und ein Bruch

Gemischt in Bruch: Ganze mal Nenner, plus Zähler.

$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$

Bruch in gemischt: Zähler durch Nenner, der Rest wird der neue Zähler.

$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$, denn $17 : 5 = 3$ Rest 2

Brüche vergleichen erst auf denselben Nenner

$\frac{3}{4}$ oder $\frac{5}{6}$? Hauptnenner 12: $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$, also $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Brüche: rechnen

Plus und Minus nur mit gleichem Nenner

Gleicher Nenner: Zähler rechnen, Nenner bleibt.

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Verschiedene Nenner: erst auf den **Hauptnenner** erweitern, das ist das kgV der Nenner.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{10}{12}-\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Nenner werden nie zusammengezählt. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ nicht $\frac{2}{5}$

Mal Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Hier braucht man keinen Hauptnenner. Vor dem Ausrechnen kürzen spart Arbeit.

Ganze Zahl mal Bruch: Die Zahl geht nur in den Zähler.

$$3\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$ nicht $\frac{3}{15}$

Geteilt mal dem Kehrwert

Kehrwert: Zähler und Nenner tauschen.

$$\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

Bruch durch ganze Zahl: Die Zahl als Bruch schreiben.

$$\frac{2}{3}:4=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Mit gemischten Zahlen je nach Rechenart

Plus und Minus: Ganze und Brüche getrennt.

$$2\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}=3+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=3\frac{5}{6}$$

Mal und Geteilt: erst in einen Bruch umwandeln.

$$1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{6}=1$$

Auf einen Blick

Rechenart	Hauptnenner?	So geht's
Plus, Minus	**ja**	Zähler rechnen, Nenner bleibt
Mal	nein	Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner
Geteilt	nein	mal dem Kehrwert

Bruch und Dezimalzahl

Dieselbe Zahl, zwei Schreibweisen: $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Dezimalzahl in Bruch die Stellen nach dem Komma geben den Nenner

- **1 Stelle:** Nenner 10
- **2 Stellen:** Nenner 100
- **3 Stellen:** Nenner 1000
- Dann **kürzen**.

$$0{,}7 = \frac{7}{10} \qquad 0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \qquad 2{,}5 = 2\frac{5}{10} = 2\frac{1}{2}$$

Bruch in Dezimalzahl zwei Wege

Weg 1: erweitern auf 10, 100 oder 1000. Geht schnell, wenn es passt.

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

Weg 2: teilen. Der Bruchstrich heißt „geteilt durch“: Zähler durch Nenner.

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$$

Schriftlich teilen, mit $3 = 3{,}000$.

Die wichtigsten Paare auswendig lernen spart viel Rechnen

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0,5	0,25	0,75	0,2	0,4	0,125	0,1	$0{,}\overline{3}$	$0{,}\overline{6}$

Wenn die Division nicht aufhört periodische Zahlen

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1\overline{6}$$

Der **Strich** steht über dem, was sich wiederholt.

Zum Weiterrechnen meist runden: $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Bruch und Dezimalzahl vergleichen beide gleich schreiben

$\frac{3}{5}$ oder 0,58? $\frac{3}{5} = 0{,}6 = 0{,}60$, und $0{,}60 > 0{,}58$. Also ist $\frac{3}{5}$ größer.

Einfache Prozente

Prozent ist nur eine andere Schreibweise für einen Bruch.

Was Prozent heißt „von Hundert“

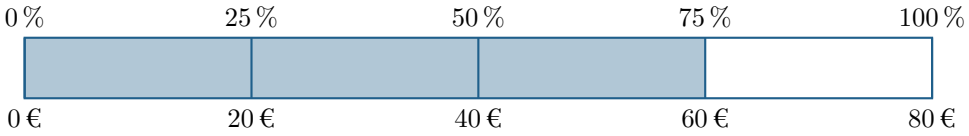
$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$25\,\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Das Zeichen % sieht aus wie ein Bruch: oben 0, Strich, unten 0, wie bei 100.

25 % heißt: 25 von 100 Teilen. Nicht $\frac{1}{25}$!

Der Prozentstreifen das Ganze ist immer 100 %



Oben die Prozente, unten die Menge. Hier sind 100 % genau 80 €. Abgelesen: **75 % von 80 € sind 60 €.**

Diese Paare auswendig das spart das meiste Rechnen

Prozent	100 %	75 %	50 %	25 %	20 %	10 %	1 %
Bruch	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
Dezimalzahl	1	0,75	0,5	0,25	0,2	0,1	0,01

Prozent von einer Zahl erst in den Bruch, dann rechnen

50 % von 18: die Hälfte: $18 : 2 = 9$

25 % von 80: ein Viertel: $80 : 4 = 20$

10 % von 70: ein Zehntel: $70 : 10 = 7$

75 % von 40: drei Viertel:

Ein Viertel: $40 : 4 = 10$

Drei Viertel: $3 \cdot 10 = 30$

Wie viel Prozent sind das? als Bruch schreiben, kürzen oder erweitern

6 von 24: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

3 von 5: $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\,\%$

Prozent von was? 25 % sind nicht immer gleich viel: 25 % von 8 € sind 2 €, 25 % von 80 € sind 20 €. Schau immer, **wovon** die Prozente sind.

Verhältnisse und Maßstab

Ein Verhältnis sagt, wie viele Teile von dem einen auf wie viele Teile von dem anderen kommen.

Was 2 : 3 heißt gelesen: „zwei zu drei“



Auf **2 Teile** Saft kommen **3 Teile** Wasser.

Das sind **zusammen 5 Teile**.

Saft: $\frac{2}{5}$ vom Ganzen, Wasser: $\frac{3}{5}$ vom Ganzen.

Nicht $\frac{2}{3}$: Der Nenner ist die Zahl *aller* Teile.

Kürzen und erweitern wie beim Bruch

$6 : 9 = 2 : 3$ (beide durch 3) $\quad 1 : 4 = 2 : 8$ (beide mal 2)

Beide Zahlen mit derselben Zahl mal oder durch. Das Verhältnis bleibt gleich.

Aufteilen in drei Schritten

20 Bonbons werden im Verhältnis 2 : 3 geteilt.



1. Alle Teile zählen: $2 + 3 = 5$

2. Ein Teil: $20 : 5 = 4$

3. Malnehmen: $2 \cdot 4 = \mathbf{8}$ und $3 \cdot 4 = \mathbf{12}$

Probe: $8 + 12 = 20$.

Mischen das Verhältnis bleibt, die Menge wächst

Sirup und Wasser im Verhältnis 1 : 4. Für 2 Becher Sirup: $1 : 4 = 2 : 8$, also **8 Becher Wasser**.

Der Maßstab ein Verhältnis zwischen Bild und Wirklichkeit

1 : 100 heißt: 1 cm auf dem Plan sind 100 cm in Wirklichkeit, also 1 m.

Plan 3 cm: $3 \cdot 100$ cm $= 300$ cm $=$ **3** m

Wirklich 5 m: 500 cm $: 100 =$ **5** cm auf dem Plan

1 : 25 000 (Wanderkarte):

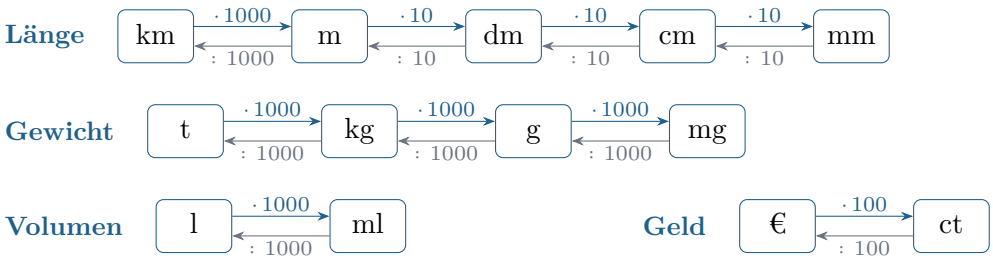
Karte 4 cm: $4 \cdot 25\,000$ cm $= 100\,000$ cm $= 1000$ m $=$ **1** km

Reihenfolge beachten! 2 : 3 ist nicht 3 : 2. Die erste Zahl gehört zum ersten Wort: „Saft zu Wasser“ heißt erst Saft, dann Wasser.

Einheiten umwandeln

mal oder durch 10, 100 und 1000 — das Komma wandert

Die Umrechnungszahlen nach rechts wird die Einheit kleiner



Die Regel eine Null in der Umrechnungszahl = eine Stelle

In die kleinere Einheit (nach rechts):
mal rechnen — das Komma rückt *nach rechts*.
Kleinere Einheit, *größere* Zahl.

In die größere Einheit (nach links):
durch rechnen — das Komma rückt *nach links*.
Größere Einheit, *kleinere* Zahl.

· 10 oder : 10	eine Null	**1 Stelle**
· 100 oder : 100	zwei Nullen	**2 Stellen**
· 1000 oder : 1000	drei Nullen	**3 Stellen**

Das unsichtbare Komma jede ganze Zahl hat eins

Hinter jeder ganzen Zahl steht ein Komma — man schreibt es nur nicht hin. Wer umwandeln will, denkt es sich dazu; dann weiß man, wo das Komma *losläuft*.

$25 = 25{,}0 \qquad 3 = 3{,}0 \qquad 1000 = 1000{,}0$

Nullen ergänzen springt das Komma über den Rand, kommt für jeden leeren Platz eine 0

2,5 km in m: · 1000, 3 Stellen nach rechts

$2\,\underbrace{5\,0\,0}_{}\,, = 2500$ m

Die grünen Nullen sind die ergänzten.

3 g in kg: : 1000, 3 Stellen nach links

$0\,,\underbrace{0\,0\,3}_{}\, = 0{,}003$ kg

Vor dem Komma steht immer etwas: mindestens eine 0.

Nullen weglassen manche dürfen weg, manche nie

Dürfen weg:
Nullen ganz hinten *hinter* dem Komma
2,500 km = 2,5 km
ein Komma ganz am Ende
2500, m = 2500 m
Nullen ganz vorne, vor der ersten Ziffer
0500 m = 500 m

Dürfen nie weg:
Nullen *zwischen* Ziffern, und Nullen zwischen Komma und Ziffer. Sie halten die Plätze frei.
3,020 kg = 3,02 kg, aber *nicht* 3,2 kg
0,05 *ist nicht* 0,5
3020 *ist nicht* 320

Zwei Einheiten auf einmal jede Einheit hat ihre Plätze

kg	g		
3	0	2	0

3 kg 20 g: Für die Gramm gibt es *drei* Plätze, weil 1 kg = 1000 g. 20 g füllen nur zwei, also kommt vorne eine 0 dazu.

3 kg 20 g = 3020 g = 3,020 kg = 3,02 kg

Zeit ist anders. Stunden, Minuten und Sekunden rechnen mit **60**, nicht mit 10, 100 oder 1000. Hier wandert kein Komma.
1 h = 60 min, 1 min = 60 s. 90 min = 60 min + 30 min = 1 h 30 min = 1,5 h, denn eine halbe Stunde ist 0,5 h.

Einheiten umwandeln: Ingenieurmethode

Wir nehmen einfach mit 1 mal, und die Einheit passt von allein.
Du brauchst dafür: Brüche kürzen. Wackelt das noch, übe es zuerst.

Zwei Zahlen, die nichts ändern sie heißen neutrale Elemente

Die 1 beim Malnehmen:

$1 \cdot 7 = 7 \qquad 1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$

Die 1 ist das **neutrale Element** der Multiplikation.

Die 0 beim Plus:

$0 + 7 = 7 \qquad 0 + 2{,}5 = 2{,}5$

Die 0 ist das **neutrale Element** der Addition.

Mit 1 malnehmen darfst du also **immer**. Die Zahl bleibt dieselbe.

Die 1 hat viele Verkleidungen oben und unten steht gleich viel

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{100}{100} = \frac{1000\,\text{g}}{1\,\text{kg}} = \frac{1\,\text{kg}}{1000\,\text{g}} = \frac{1000\,\text{kg}}{1\,\text{t}} = \frac{100\,\text{cm}}{1\,\text{m}} = \frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}}$$

1000 g und 1 kg sind genau gleich schwer. Ein Bruch mit gleich viel oben und unten ist 1, wie $\frac{2}{2}$. Du darfst ihn auch umdrehen.

Das Rezept in drei Schritten

1. **Hinschreiben:** Zahl mit Einheit.
2. **Mit der passenden 1 malnehmen:** Die *alte* Einheit kommt nach *unten*, die *neue* nach *oben*.
3. **Wegkürzen und rechnen:** Die alte Einheit steht einmal oben und einmal unten, sie fällt weg.

Wie viel Kilogramm sind 2,5 t?

$$2{,}5\,\cancel{\text{t}} \cdot \frac{1000\,\text{kg}}{1\,\cancel{\text{t}}} = 2{,}5 \cdot 1000\,\text{kg} = \mathbf{2500}\,\text{kg}$$

Noch mehr Beispiele immer dasselbe Rezept

Von klein nach groß:

$$750\,\cancel{\text{g}} \cdot \frac{1\,\text{kg}}{1000\,\cancel{\text{g}}} = \frac{750}{1000}\,\text{kg} = \mathbf{0{,}75}\,\text{kg}$$

Zeit, ganz ohne Kommaschieben:

$$90\,\cancel{\text{min}} \cdot \frac{1\,\text{h}}{60\,\cancel{\text{min}}} = \frac{90}{60}\,\text{h} = \mathbf{1{,}5}\,\text{h}$$

Mehrere Stufen: einfach mehrere Einsen hintereinander.

$$3\,\cancel{\text{km}} \cdot \frac{1000\,\cancel{\text{m}}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{100\,\text{cm}}{1\,\cancel{\text{m}}} = 3 \cdot 1000 \cdot 100\,\text{cm} = \mathbf{300\,000}\,\text{cm}$$

Falsch herum? Die Einheit verrät es dir: $750\,\text{g} \cdot \frac{1000\,\text{g}}{1\,\text{kg}}$ Hier stehen die Gramm zweimal oben, nichts fällt weg. Also den Bruch **umdrehen**.

---

mit Prozent

Auch Prozent ist eine verkleidete 1 Prozent heißt „von Hundert“

$$1 = 100\,\% = \frac{100\,\%}{1} = \frac{1}{100\,\%}$$

In Prozent: mit 100 % malnehmen.

$\frac{3}{4} \cdot 100\,\% = \mathbf{75}\,\%$ $\qquad 0{,}25 \cdot 100\,\% = \mathbf{25}\,\%$

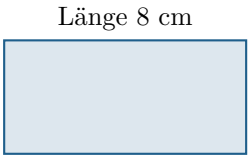
Aus Prozent heraus: mit der umgedrehten 1.

$$40\,\cancel{\%} \cdot \frac{1}{100\,\cancel{\%}} = \frac{40}{100} = \mathbf{0{,}4}$$

Fläche und Volumen

Umfang ist der Weg um eine Figur, Fläche ist, was sie bedeckt, Volumen ist, was in einen Körper hineinpasst.

Rechteck und Quadrat Umfang in cm, Fläche in cm²



Umfang = 2 · Länge + 2 · Breite
$2 \cdot 8\ \text{cm} + 2 \cdot 5\ \text{cm} = 26\ \text{cm}$

Fläche = Länge · Breite
$8\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 40\ \text{cm}^2$

Beim Quadrat sind Länge und Breite gleich. Beide Seiten vorher in **dieselbe Einheit** bringen.

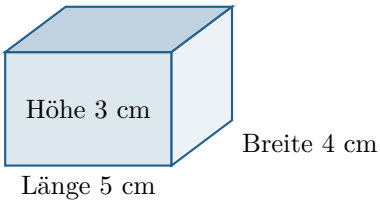
Flächeneinheiten von Stufe zu Stufe immer 100

$$\text{km}^2 \xrightarrow{100} \text{ha} \xrightarrow{100} \text{a} \xrightarrow{100} \text{m}^2 \xrightarrow{100} \text{dm}^2 \xrightarrow{100} \text{cm}^2 \xrightarrow{100} \text{mm}^2$$

Je Stufe rückt das Komma um **2 Stellen**: $3\ \text{m}^2 = 300\ \text{dm}^2$ $4{,}5\ \text{m}^2 = 450\ \text{dm}^2$ $350\ \text{a} = 3{,}5\ \text{ha}$

Warum 100? 1 dm² ist ein Quadrat aus 10 mal 10 Quadraten von 1 cm².

Quader und Würfel Volumen in cm³, Oberfläche in cm²



Volumen = Länge · Breite · Höhe
$5\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 60\ \text{cm}^3$

Oberfläche: alle 6 Flächen, je 2 sind gleich:
$2 \cdot (5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3)\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 47\ \text{cm}^2 = 94\ \text{cm}^2$

Beim Würfel sind alle Kanten gleich und alle 6 Flächen.

Volumeneinheiten von Stufe zu Stufe immer 1000

$$\text{m}^3 \xrightarrow{1000} \text{dm}^3 \xrightarrow{1000} \text{cm}^3 \xrightarrow{1000} \text{mm}^3$$

Je Stufe rückt das Komma um **3 Stellen**: $2\ \text{m}^3 = 2000\ \text{dm}^3$ $1{,}5\ \text{dm}^3 = 1500\ \text{cm}^3$

Liter: $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{l}$ $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{ml}$ $1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{l}$

Diagramme und Mittelwert

Erst schauen, was dargestellt ist. Dann ablesen.

So liest du ein Diagramm immer zuerst

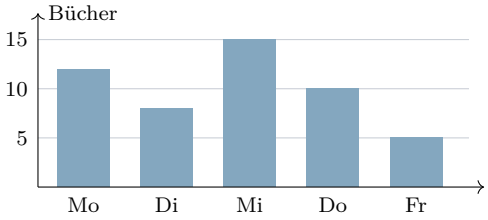
- **Überschrift:** Worum geht es?
- **Achsen:** Was steht an welcher Achse, in welcher Einheit?
- **Skala:** Wie viel ist ein Kästchen wert? Sie geht nicht immer in 1er-Schritten.

Tabelle und Säulendiagramm Werte nebeneinander vergleichen

Ausgeliehene Bücher in einer Woche:

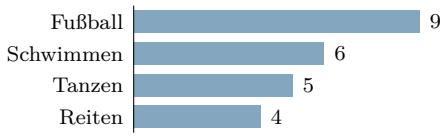
Tag	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Bücher	12	8	15	10	5

Die höchste Säule ist der größte Wert: am Mittwoch 15 Bücher.

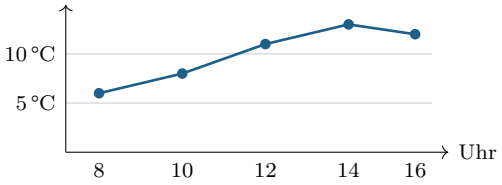


Balken und Linie zwei weitere Formen

Balkendiagramm: wie Säulen, nur liegend. Gut bei langen Namen.



Liniendiagramm: zeigt, wie sich etwas **mit der Zeit** ändert.



Der Mittelwert alle Werte gleichmäßig verteilt

1. Alle Werte zusammenzählen.
2. Durch die **Anzahl** der Werte teilen.

Der Mittelwert muss zwischen dem kleinsten und dem größten Wert liegen. Er muss selbst keiner der Werte sein.

Bücher von Mo bis Fr:

$12 + 8 + 15 + 10 + 5 = 50$

$50 : 5 = 10$

Im Mittel wurden **10 Bücher** je Tag ausgeliehen.

Der Median der Wert in der Mitte

1. Alle Werte der Größe nach ordnen.
2. Der Wert in der Mitte ist der **Median**.

Bei gerader Anzahl gibt es zwei mittlere Werte: Der Median ist ihr Mittelwert.

Bücher von Mo bis Fr, geordnet:

5 8 **10** 12 15

Der Median ist **10 Bücher**.

Extra scharf: Mittelwert oder Median?

Taschengeld im Monat: 5 6 **8** 11 95 Euro.
Mittelwert: $125 : 5 = 25$ €. Aber vier von fünf bekommen viel weniger!
Median: **8 €**. Ein einzelner Ausreißer zieht den Mittelwert nach oben, den Median nicht.

Bei den Einkommen in Deutschland ist es genauso: Mittelwert 64 441 €, Median 54 066 €.

Vollzeit, brutto im Jahr 2025. Statistisches Bundesamt, Pressemitteilung Nr. 113 vom 1. April 2026

Sachaufgaben

Nicht gleich losrechnen. Erst verstehen, was gefragt ist.

Fünf Schritte immer in dieser Reihenfolge

1. **Frage finden.** Was soll herauskommen? Frage unterstreichen.
2. **Angaben herausschreiben.** Nur was gebraucht wird, mit Einheit.
3. **Rechnung aufstellen.** Welche Rechenart passt? Was muss zuerst gerechnet werden?
4. **Rechnen und prüfen.** Überschlag: Kann das Ergebnis stimmen?
5. **Antwortsatz.** Ein ganzer Satz, der die Frage beantwortet, mit Einheit.

Ein Beispiel alle fünf Schritte

Ein Verein kauft 4 Bälle zu je 12,50 € und bezahlt mit einem 100-€-Schein.
Wie viel Geld bekommt er zurück?

Frage: Wie viel Wechselgeld?

Angaben: 4 Bälle, je 12,50 €; bezahlt 100 €

Überschlag: $4 \cdot 12\ € = 48\ €$, also etwa 50 € zurück.

Rechnung:
$4 \cdot 12{,}50\ € = 50{,}00\ €$
$100\ € - 50\ € = 50\ €$

Antwort: Der Verein bekommt 50 € zurück.

Welche Rechenart? Wörter, die oft einen Hinweis geben

+	zusammen, insgesamt, dazu, mehr als, die Summe
−	übrig, weniger als, Unterschied, wie viel fehlt, zurück
·	je, jeder, pro, das Dreifache, mal so viele
:	verteilen, aufteilen, gleich viele, die Hälfte, ein Drittel

Nur ein Hinweis: „3 mehr als“ heißt plus, aber die Frage entscheidet immer. Lies den ganzen Satz.

Typische Fallen

- **Überflüssige Angaben.** Nicht jede Zahl im Text wird gebraucht.
- **Verschiedene Einheiten.** Erst umwandeln: 1,5 m und 40 cm → 150 cm und 40 cm.
- **Rest beim Teilen.** Was der Rest bedeutet, sagt die Aufgabe. 58 Kinder, 9 passen in einen Bus: $58 : 9 = 6$ Rest 4, also **7 Busse**, denn niemand bleibt zurück.
- **Zeit rechnet mit 60.** 7:45 Uhr plus 1 h 25 min ist 9:10 Uhr.